

# Problemas de la Olimpiada Matemática Española (fase local) de combinatoria, juegos, etc.

Noviembre de 2020

## Problemas fáciles

**Problema 1 (2006)** *En el sótano del castillo, 7 gnomos guardan su tesoro. El tesoro está detrás de 12 puertas, cada una de ellas con 12 cerraduras. Todas las cerraduras son distintas. Cada gnomo tiene llaves para algunas de las cerraduras. Tres gnomos cualesquiera tienen conjuntamente llaves para todas las cerraduras. Probar que entre todos los gnomos tienen por lo menos 336 llaves.*

**Nota:** En realidad, entre todos los gnomos tienen por lo menos 720 llaves.

**Solución:** Cada cerradura debe poder ser abierta al menos por 5 gnomos, ya que en caso contrario podríamos encontrar tres gnomos que no abrieran esa cerradura. Como hay 144 cerraduras, debe haber al menos  $144 \times 5 = 720$  llaves.  $\square$

**Problema 2 (2006)** *Decimos que tres números naturales distintos forman una terna aditiva si la suma de los dos primeros de ellos es igual al tercero. Hallar, razonadamente, el máximo número de ternas aditivas que puede haber en un conjunto dado de 20 números naturales.*

**Solución:** Observemos que si  $a + b = c$  con  $a < b$ , y además  $a' + b' = c$  con  $a' < b'$ , entonces o bien  $a = a'$  y  $b = b'$ , o bien los cuatro números  $a, b, a', b'$  son distintos.

En un conjunto de 20 números naturales,  $a_1 < a_2 < \dots < a_{20}$ , veamos para un cierto  $i$  cuántas ternas puede haber que tengan a  $a_i$  como número mayor. Si  $i = 2k + 1$ , el número  $a_{2k+1}$  tiene  $2k$  números menores que él, luego sólo puede ser el número mayor en  $k$  ternas, por la propiedad anterior. Si  $i = 2k + 2$ , el número  $a_{2k+2}$  tiene  $2k + 1$  números menores que él, luego sólo puede ser el número mayor en  $k$  ternas. Por tanto, en el conjunto de 20 números, como mucho puede haber  $0 + 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \dots + 9 + 9 = 90$  ternas.

Por otra parte, existe un conjunto de 20 números que tiene exactamente 90 ternas. Concretamente:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ . Luego la respuesta es 90.  $\square$

**Problema 3 (2005)** *Cuatro bolas negras y cinco bolas blancas se colocan, en orden arbitrario, alrededor de una circunferencia. Si dos bolas consecutivas son del mismo color, se inserta una*

nueva bola negra entre ellas. En caso contrario, se inserta una nueva bola blanca. Se retiran las bolas negras y blancas previas a la inserción. Repitiendo el proceso, ¿es posible obtener nueve bolas blancas?

**Solución:** No es posible. Se pongan como se pongan 9 bolas de dos posibles colores en un círculo, siempre hay dos consecutivas del mismo color, puesto que en caso contrario habría tantas bolas blancas como negras, lo que es imposible. Por tanto, ante cualquier configuración de las 9 bolas, siempre habrá una bola negra en el paso siguiente. Luego nunca pueden obtenerse 9 bolas blancas.  $\square$

**Problema 4 (2004)** *En un tablero de damas ( $8 \times 8$ ), colocamos las 24 fichas del juego de modo que llenen las 3 filas de arriba. Podemos cambiar la posición de las fichas según el siguiente criterio: una ficha puede saltar por encima de otra a un hueco libre, ya sea horizontal (a izquierda o derecha), vertical (hacia arriba o hacia abajo) o diagonalmente. ¿Podemos lograr colocar todas las fichas en las 3 filas de abajo?*

**Solución:** No se puede. Una ficha que comience en una fila par, estará siempre en una fila par, y una que comience en una fila impar, estará siempre en una fila impar. Al comienzo hay 16 fichas en filas impares y 8 fichas en filas pares, luego no pueden terminar en las tres filas de abajo, pues en ese caso habría 16 fichas en filas pares y 8 en filas impares.  $\square$

**Problema 5 (2004)** *Hallad el número mínimo de apuestas de quiniela que debemos rellenar para asegurar que obtenemos, al menos, 5 aciertos en una de ellas. (Una apuesta de quiniela consiste en un pronóstico de resultado para 14 partidos, en cada partido hay 3 posibles resultados).*

**Solución:** El número mínimo de apuestas es tres. Podemos por ejemplo hacer una apuesta donde todo sean unos, otra apuesta donde todo sean equis, y otra donde todo sean doses. Sabemos que la combinación ganadora tiene al menos 5 valores repetidos, ya que si tuviera como mucho cuatro unos, cuatro equis y cuatro doses, no se llegaría a 14 resultados. Por tanto, una de nuestras tres apuestas tendrá al menos cinco aciertos.

Si hiciéramos sólo dos apuestas, para cada partido señalaríamos como mucho dos posibles resultados. Si en cada partido saliera precisamente un resultado no hemos marcado, obtendríamos cero aciertos. Por tanto, con dos apuestas no podemos asegurar ningún acierto, y así el número mínimo de apuestas para asegurar cinco aciertos es tres.  $\square$

**Problema 6 (2002)** *La suma de las edades de los 120 estudiantes que participaron el año pasado en la fase final de la Olimpiada Matemática fue de 2002 años. Demuestra que podrías haber elegido 3 de ellos tales que la suma de sus edades no fuera menor de 51 años.*

**Solución:** Consideremos los tres alumnos de mayor edad. Si la suma de sus edades fuera menor de 51, el menor de ellos tendría como mucho 16 años. Esto implica que los otros 117 estudiantes tendrían como mucho 16 años, luego la suma total de estos 117 sería como mucho  $117 \cdot 16 = 1872$ . Sumando la edad de los tres mayores, la suma total sería como mucho  $1872 + 50 = 1922$ , lo que no es posible.  $\square$

**Problema 7 (2001)** *Un condenado queda en libertad cuando alcance el final de una escalera de 100 escalones. Pero no puede avanzar a su antojo, puesto que está obligado a subir un solo escalón cada día de los meses impares y a bajar un escalón cada día de los meses pares. Comienza el 1 de enero de 2001. ¿Qué día quedará en libertad? ¿Qué día quedaría en libertad si la escalera tuviera 99 escalones?*

**Solución:** Es fácil observar que el primer año va a moverse entre los escalones 1 y 36. Éste, el 36, lo alcanza el día 31 de julio. El 31 de diciembre de ese año, llegará al escalón 3. En general, si un 31 de diciembre está en el escalón  $n$ , el año siguiente: se mueve entre los escalones  $n + 1$  y  $n + 36$  y termina en el  $n + 3$ , si ese año siguiente no es bisiesto, o bien se mueve entre los escalones  $n + 1$  y  $n + 35$  y termina en el  $n + 2$  si ese año siguiente es bisiesto.

Con unas cuentas sencillas, vemos que el 31 de diciembre de 2024 llegará al escalón 66, tras haber pasado el 31 de julio de ese mismo año por el escalón 99 como punto más elevado. A partir de ahí, se observa lo siguiente respecto al año 2025: el 31 de enero termina en el escalón 97, el 28 de febrero en el 69, y el 31 de marzo, por fin en el 100. Si la escalera hubiera tenido un peldaño menos, habría quedado en libertad 8 meses antes, el 31 de julio de 2024.  $\square$

## Problemas de dificultad media

**Problema 8 (2007)** *Un poliedro convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuántos segmentos que unen pares de vértices del poliedro son interiores al mismo, es decir, no son aristas ni están contenidos en una cara?*

**Solución:** Como cada vértice del poliedro está exactamente en una cara cuadrada, y hay 12 caras cuadradas, el poliedro tiene 48 vértices. Dado un vértice, existen 47 segmentos que lo unen a otros tantos vértices del poliedro. De ellos, 3 son aristas, 1 es la diagonal del cuadrado adyacente, 3 son diagonales del hexágono adyacente, y 5 son diagonales del octógono adyacente. Por tanto, por cada vértice pasan exactamente  $47 - 3 - 1 - 3 - 5 = 35$  segmentos interiores al poliedro. Como hay 48 vértices, si multiplicamos  $35 \cdot 48 = 1680$ , habremos contado cada segmento interior dos veces. Dividiendo por dos, obtenemos que hay 840 segmentos interiores.  $\square$

**Problema 9 (2005)** *En un tablero de ajedrez  $10 \times 10$  se colocan 41 torres. Probar que se pueden elegir al menos 5 de ellas que no se coman entre sí.*

**Solución:** Debe existir una fila  $A$  que contiene al menos 5 torres, ya que si todas las filas tuvieran como mucho 4 torres, habría como mucho 40 torres, lo que no es cierto.

Si quitamos la fila  $A$ , quedan 9 filas con al menos 31 torres. Por el mismo razonamiento anterior, una fila  $B$  de estas 9, contiene al menos 4 torres.

Si quitamos las filas  $A$  y  $B$ , quedan 8 filas con al menos 21 torres, por lo que una fila  $C$  contiene al menos 3 torres.

Quitando las filas  $A$ ,  $B$  y  $C$ , quedan 7 filas con al menos 11 torres, por lo que una fila  $D$  contiene al menos 2 torres.

Quitando la fila  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  quedan 6 filas una de las cuales, digamos  $E$ , contiene al menos 1 torre.

Elegimos una torre  $T_1$  de la fila  $E$ .

Elegimos una torre  $T_2$  de la fila  $D$ , que no esté en la columna de  $T_1$ .

Elegimos una torre  $T_3$  de la fila  $C$ , que no esté en la columna de  $T_1$  ni en la de  $T_2$ .

Elegimos una torre  $T_4$  de la fila  $B$ , que no esté en las columnas de  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$ .

Finalmente elegimos una torre  $T_5$  de la fila  $A$  que no esté en las columnas de

Por construcción, las torres  $T_1, T_2, T_3, T_4$  y  $T_5$  no se comen entre sí.  $\square$

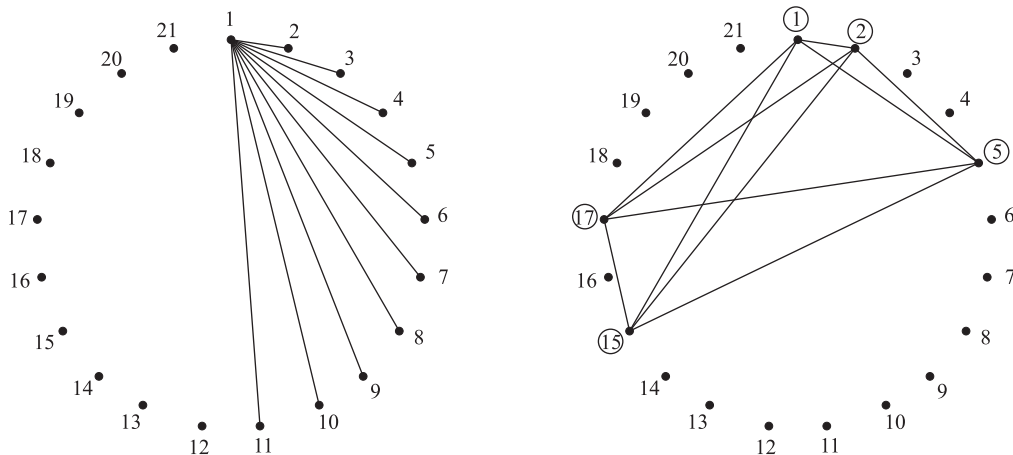
**Problema 10 (2004)** *¿Podemos trazar 2003 segmentos en el plano de forma que cada uno de ellos corte exactamente a otros tres?*

**Solución:** No se puede. Supongamos que es posible, y numeremos los segmentos del 1 al 2003. Escribamos los pares  $(a, b)$  tales que el segmento  $a$  corta al segmento  $b$ . Por un lado, como cada segmento corta a otros tres, habremos escrito  $2003 \cdot 3$  pares, que es un número impar. Por otro lado, por cada par  $(a, b)$  tendremos el par  $(b, a)$ , luego podemos agrupar los pares de dos en dos, es decir, habrá un número par, lo que es imposible.  $\square$

**Problema 11 (2003)** *¿Cuál es el número máximo de vértices que podemos elegir de un polígono regular de 21 lados para que, al trazar los segmentos que los unen entre sí, no haya dos con la misma longitud?*

**Solución:** Por simetría de la figura, sólo hay 10 distancias distintas. Como mucho podremos elegir 5 vértices, pues entre cinco puntos se pueden trazar  $\binom{5}{2} = 10$  segmentos.

Nos faltará constatar si con cinco vértices se puede. La figura de la derecha muestra que sí es posible.  $\square$



**Problema 12 (2003)** *Se dispone de pequeñas piezas de madera de tamaño  $4 \times 5 \times 10$ . Decide si es posible o no apilarlas, sin dejar huecos y apoyándolas siempre sobre cualquiera de sus caras, para formar un ortoedro de dimensiones  $2^{2003} \times 3^{2003} \times 5^{2003}$ .*

**Solución:** No es posible. En cada pieza, el área de una cara puede ser 20, 40 o 50. Por tanto, si conseguimos apilar las piezas para formar un ortoedro, el área de cada caras de dicho ortoedro deberá ser múltiplo de 10. Pero las áreas de las caras del ortoedro pedido son  $6^{2003}$ ,  $10^{2003}$  y  $15^{2003}$ , y ni el primer ni el tercer número son múltiplos de 10.  $\square$

**Problema 13 (2002)** *En un equipo de fútbol tenemos 11 jugadores, cuyas camisetas están numeradas del 1 al 11. Elegimos al azar 6 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de sus camisetas sea impar?*

**Solución:** Para que la suma sea impar, debemos haber elegido 1, 3 o 5 jugadores cuyo número sea impar. En el primer caso, habremos elegido a todos los jugadores pares y a un jugador impar, luego hay 6 posibilidades. En el segundo caso, habremos elegido a 3 jugadores pares (hay  $\binom{5}{3} = 10$  posibilidades) y a 3 jugadores impares (hay  $\binom{6}{3} = 20$  posibilidades), luego hay 200 posibilidades de que se dé este caso. En el tercer caso habremos escogido un jugador par (5 posibilidades) y 5 jugadores impares (hay  $\binom{6}{5} = 6$  posibilidades), luego hay 30 posibilidades de que se dé este caso. En total hay 236 posibilidades de que la suma de las camisetas sea impar. Como hay  $\binom{11}{6} = 462$  casos posibles, la probabilidad pedida es  $\frac{236}{462} = \frac{118}{231}$ .  $\square$

**Problema 14 (2001)** *Nueve personas han celebrado cuatro reuniones diferentes sentados alrededor de una mesa circular. ¿Han podido hacerlo sin que existan dos de esas personas que se hayan sentado una junto a la otra en más de una reunión? Razona la respuesta.*

**Solución:** Sí han podido hacerlo. Una posible disposición de las nueve personas, en las cuatro reuniones, es la siguiente:

Primera reunión: 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Segunda reunión: 1,3,5,7,9,2,4,6,8.

Tercera reunión: 1,4,7,3,8,5,2,9,6.

Cuarta reunión: 1,5,9,3,6,8,4,2,7.  $\square$

## Problemas difíciles

**Problema 15 (2009)** *Se tienen en el plano  $3n$  puntos:  $n$  de color blanco,  $n$  de color azul y  $n$  de color negro. Cada uno de los puntos está unido con puntos de color distinto al suyo mediante  $n + 1$  segmentos exactamente. Probar que hay, al menos, un triángulo formado por vértices de distinto color.*

**Solución:** Todo punto estará unido a  $k$  puntos de otro color, y a  $n + 1 - k$  puntos del tercer color. Sea  $x$  un punto tal que este número  $k$  sea mínimo, y sea  $y$  uno de los  $k$  puntos del segundo color

que están unidos a  $x$ . Sabemos que  $x$  estará unido a  $n + 1 - k$  puntos del tercer color y que, por la minimalidad de  $k$ ,  $y$  está unido al menos a  $k$  puntos del tercer color. Como sólo hay  $n$  puntos del tercer color, debe haber al menos un punto que esté unido a  $x$  y a  $y$ , formando el triángulo pedido.  $\square$

**Problema 16 (2003)** *Por turno, en orden alfabético, tres amigos lanzan un dado. Quien saque un 6 en primer lugar gana lo apostado. Por cada euro que apueste Carlos, ¿qué cantidad han de poner Ana y Blas para equilibrar el juego y lograr que sea equitativo, es decir, para que las expectativas de ganancia sean las mismas para los tres colegas y no se vean afectadas por el orden de actuación al lanzar el dado?*

**Solución:** La probabilidad de que gane Ana en la primera tirada es  $\frac{1}{6}$  (que saque un 6 a la primera). La probabilidad de que gane Blas en su primera tirada es  $\frac{5}{6} \frac{1}{6}$  (que Ana no saque un 6, y que él sí lo saque). Análogamente, la probabilidad de que Carlos gane en su primera tirada es  $(\frac{5}{6})^2 \frac{1}{6}$ .

En general, un jugador gana en la tirada  $i$  si en todas las tiradas anteriores ha salido un número distinto de 6, y en la tirada  $i$  ha salido un 6. La probabilidad de que esto pase es  $(\frac{5}{6})^{i-1} \frac{1}{6}$ .

Por tanto, la probabilidad de que ganen Ana, Blas o Carlos es, respectivamente:

$$p(A) = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^6 \frac{1}{6} + \dots$$

$$p(B) = \left(\frac{5}{6}\right) \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^7 \frac{1}{6} + \dots$$

$$p(C) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^5 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^8 \frac{1}{6} + \dots$$

Observemos que  $p(C) = \frac{5}{6}p(B) = (\frac{5}{6})^2 p(A)$ . Por tanto, por cada euro que apueste carlos, Ana deberá poner  $(\frac{6}{5})^2 = 1,44$  euros, y Blas deberá poner  $\frac{6}{5} = 1,20$  euros.  $\square$

**Problema 17 (2002)** *Considera 7 puntos arbitrarios del plano y los 21 segmentos que los conectan entre sí. Demuestra que al menos 3 de estos 21 segmentos son de distinta longitud.*

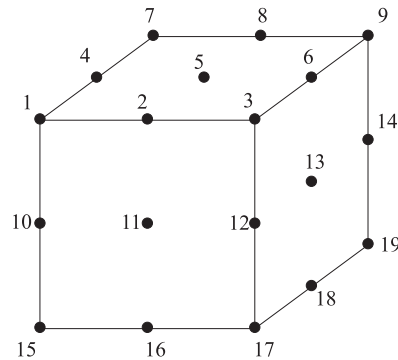
**Nota:** Los puntos deben ser distintos entre sí, de otra forma el enunciado no es correcto.

**Solución:** Escojamos dos de los 7 puntos,  $A$  y  $B$ , de forma que la recta  $AB$  deje todos los puntos en un mismo semiplano. Supongamos que sólo hubiera 2 longitudes distintas,  $a$  y  $b$ . Entonces todos los puntos que no sean  $A$  y  $B$ , deben estar en una circunferencia de centro  $A$  y radio  $a$  o  $b$ , y en una circunferencia de centro  $B$  y radio  $a$  o  $b$ . Como estas circunferencias tienen como mucho 4 puntos de corte en el mismo semiplano delimitado por la recta  $AB$ , se sigue que como mucho podríamos tener 6 puntos, lo cual es una contradicción.  $\square$

**Problema 18 (2001)** *Consideramos los siguientes 27 puntos de un cubo: el centro (1), los centros de las caras (6), los vértices (8) y los centros de las aristas (12). Coloreamos cada uno de*

esos puntos de azul o de rojo. ¿Puede hacerse de modo que no haya tres puntos del mismo color alineados? Demuéstralo.

**Solución:** No puede hacerse. Supongamos que fuera posible y que el centro del cubo es azul, siendo el otro caso análogo. No puede haber entonces dos centros de caras opuestas que sean azules. Por tanto hay al menos tres centros de caras que son rojos y son concurrentes en un vértice. Podemos considerar entonces, en el dibujo, que los puntos 5, 11 y 13 son rojos.



El punto 2 no puede ser rojo, ya que en ese caso los puntos 8 y 16 serían azules y estarían alineados con el centro. Por tanto el punto 2 es azul. Lo mismo ocurre con los puntos 6 y 12.

El punto 3 no puede ser azul, ya que entonces los puntos 1 y 17 serían rojos, y estarían alineados con el punto 11. Por tanto el punto 3 es rojo. Esto implica que los puntos 7, 15 y 19 son azules. Esto implica a su vez, ya que el centro del cubo es azul, que los puntos 1, 9 y 17 son rojos. Pero ya tenemos una contradicción, pues hemos llegado a que los puntos 1, 11 y 17 son rojos.  $\square$